

## 4.5- Using Matrix Row Operations

### Elementary Row Operations

The following operations produce equivalent matrices, and may be used in any order and as many times as necessary to obtain reduced row-echelon form.

- Interchange two rows
- Multiply all entries in one row by a nonzero number
- Add a multiple of one row to another.

ROW OPERATION	NOTATION
Interchange rows 1 and 2	$R_1 \longleftrightarrow R_2$
Multiply each entry in row 3 by -2.	$-2 R_3 \longrightarrow R_3$
Replace row 1 with the sum of row 1 and 4 times each entry in row 2.	$4R_2 + R_1 \longrightarrow R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 21 \\ 2 & 1 & 0 & : & 23 \\ 0 & 1 & 3 & : & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 21 \\ 0 & -1 & -2 & : & -19 \\ 0 & 1 & 3 & : & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 2 \\ 0 & -1 & -2 & : & -19 \\ 0 & 1 & 3 & : & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -R_2 \rightarrow R_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 19 \\ 0 & 1 & 3 & : & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 19 \\ 0 & 0 & 1 & : & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 8 \\ 0 & 1 & 2 & : & 19 \\ 0 & 0 & 1 & : & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 8 \\ 0 & 1 & 0 & : & 7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x = 8$$

$$y = 7$$

$$z = 6$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & : & 1 \\ 3 & -2 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & : & -4 \\ 3 & -2 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & : & -4 \\ 0 & -17 & : & 17 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{17}R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & : & -4 \\ 0 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - 5R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ 5x + 9y + 5z = 22 \end{cases}$$

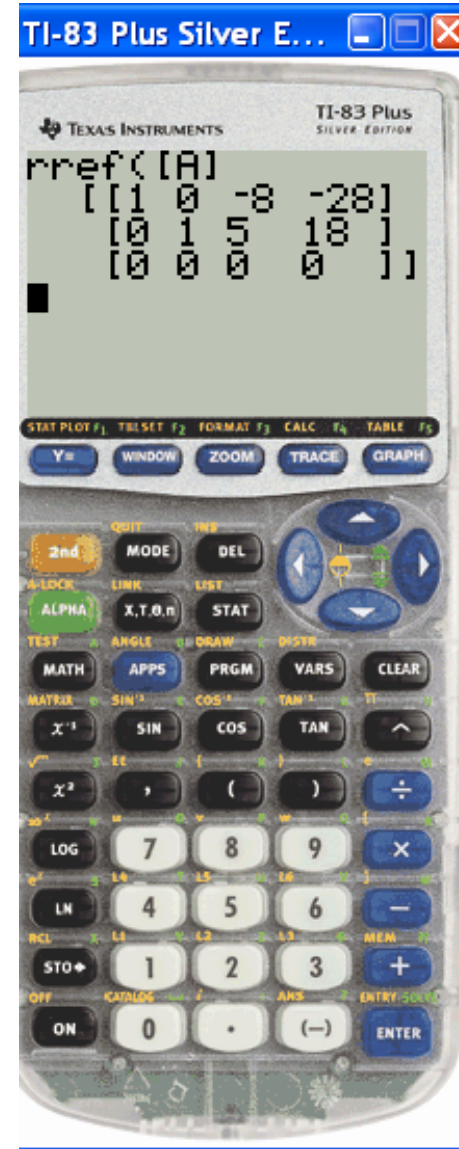
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 5 & 22 \end{array} \right]$$

dependent

$$x = 8z - 28$$

$$y = -5z + 18$$

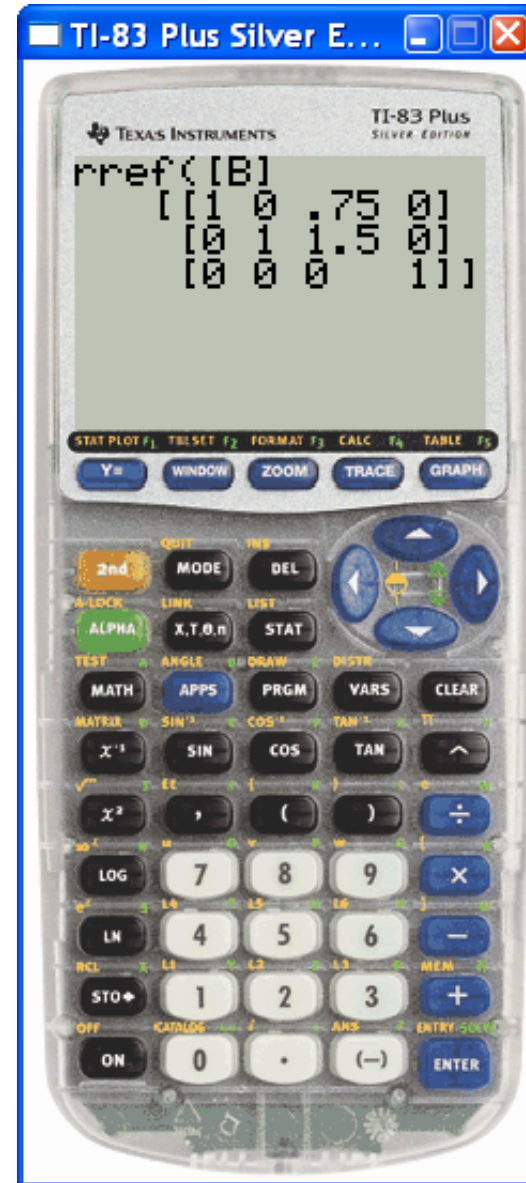
$$z = z$$



$$\begin{cases} 4x - 4y - 3z = 2 \\ 4x + 3z = 3 \\ 4y + 6z = 3 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \end{array} \right]$$

Inconsistent  
No Solution



# Homework

Pg. 256-259 #8-36 even, 40-41

$$14) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & : & 30 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 10 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_3 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 5$$

$$y = 3$$

$$z = 1$$

$$15) \begin{bmatrix} 4 & 4 & : & 3 & 2 \\ 1 & 3 & : & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} R_1 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 8 \\ 1 & 3 & : & 16 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 8 \\ 0 & -2 & : & -8 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 8 \\ 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = 4$$

$$Y = 4$$

$$20) \begin{cases} x + 2y = 16 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 16 \\ 2 & 1 & : & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & : & 16 \\ 0 & -3 & : & -21 \end{array} \right] \\ \frac{R_2}{-3} \rightarrow R_2 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & : & 16 \\ 0 & 1 & : & 7 \end{array} \right] \\ R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 7 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 7 \end{array}$$

$$22) \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & :-13 \\ 0 & -2 & 1 & :1 \\ 0 & 0 & -6 & :-30 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & :-13 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & :-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & :-30 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - 4R_2 \rightarrow R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & :-11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & :-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & :-30 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_3}{-6} \rightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & :-11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & :-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & :5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_3 \rightarrow R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & :-6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & :-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & :5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 + \frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & :-6 \\ 0 & 1 & 0 & :2 \\ 0 & 0 & 1 & :5 \end{bmatrix}$$

$$22) \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 13 \\ 0 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & -6 & : & -30 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1 \quad \frac{R_3}{-6} \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -11 \\ 0 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & -6 & : & -30 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -11 \\ 0 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_3 \rightarrow R_1 \quad R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \quad \frac{R_2}{-2} \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -6 \\ 0 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -6 \\ 0 & -2 & 0 & : & -4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -6 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$x = -6$$

$$y = 2$$

$$z = 5$$

$$24) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & : & 2 \\ 1 & -1 & 2 & : & 2 \\ 1 & 2 & -3 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 4 \\ 1 & -1 & 2 & : & 2 \\ 2 & -3 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 4 \\ 0 & -3 & 5 & : & -2 \\ 2 & -3 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 4 \\ 0 & -3 & 5 & : & -2 \\ 0 & -7 & 7 & : & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{-3}R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 + 7R_2 \rightarrow R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & : & \frac{2}{3} \\ 0 & -7 & 7 & : & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & : & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & : & \frac{2}{3} \\ 0 & -7 & 7 & : & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & : & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & : & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & : & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\frac{1}{3}}R_3 \rightarrow R_3 \\ R_1 - \frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 + \frac{5}{3}R_3 \rightarrow R_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & : & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & : & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & : & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$24) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - R_2 \rightarrow R_1 \\ R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3 \\ R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{R_2}{2} \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ \frac{1}{4}R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 4 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 + 9R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 + 4R_3 \rightarrow R_2 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{array} \right]$$

$$26) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & : & 1 \\ 2 & 0 & 2 & : & 4 \\ 1 & 1 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 2 & 0 & 2 & : & 4 \\ 2 & -1 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & -2 & 0 & : & -4 \\ 2 & -1 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & -2 & 0 & : & -4 \\ 0 & -3 & -1 & : & -7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_2}{-2} \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & -3 & -1 & : & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & -1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & -1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$-1R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - R_3 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 1$$

$$28) \begin{cases} y + 2z = \frac{3}{2} \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & 2 & : & 4 \\ 1 & 1 & 0 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \quad R_2 - R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 2 & 2 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2 \quad R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$z = 0$$

$$28) \begin{cases} y + 2z = \frac{3}{2} \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & 2 & : & 4 \\ 1 & 1 & 0 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 2 & 2 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_1 - R_2 \rightarrow R_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{R_3}{2} \rightarrow R_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \\ R_1 + 2R_3 \rightarrow R_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$z = 0$$

$$30) \begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + 6z = 6 \end{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & : & 4 \\ 1 & -3 & 2 & : & 2 \\ 3 & 1 & 6 & : & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_1 \rightarrow R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 2 \\ 1 & -3 & 2 & : & 2 \\ 3 & 1 & 6 & : & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 2 \\ 0 & -3 & 0 & : & 0 \\ 3 & 1 & 6 & : & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 2 \\ 0 & -3 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_2}{-3} \rightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = -2z + 2$$

$$y = 0$$

$$z = z$$

$$40) \quad 2x + 1y = 140$$

$$4x + 3y = 290$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & : & 140 \\ 4 & 3 & : & 290 \end{bmatrix}$$

65 pliers

10 scissors

